Soal dan Pembahasan
Olimpiade Sains Kota/Kabupaten 2022
Bidang Matematika
Tingkat SMA/MA Sederajat

Wildan Bagus Wicaksono

Diperbarui 14 Juni 2022

1 Soal

§1.1 Kemampuan Dasar

Terdiri dari 10 soal. Setiap soal yang dijawab benar bernilai 2 poin dan tidak ada pengurangan untuk soal yang dijawab salah atau tidak dijawab (kosong).

1. Misalkan $f(x) = a^2x + 300$. Jika

$$f(20) + f^{-1}(22) = f^{-1}(20) + f(22),$$

maka $f(1) = \ldots .$

2. Banyaknya bilangan bulat dari 1001 sampai 2022 yang habis dibagi 15 atau 9 adalah . . . .

3. Diberikan segitiga ABC siku-siku di B. Titik D berada pada sisi AB dan titik E berada pada sisi AC. Diketahui DE sejajar BC. Jika $AD = 21, DB = 3$, dan $BC = 32$, maka panjang AE adalah . . . .

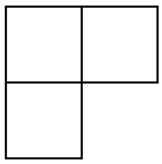
4. Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan

$$|x| + |y| + |x + y| = 24$$

adalah . . . .

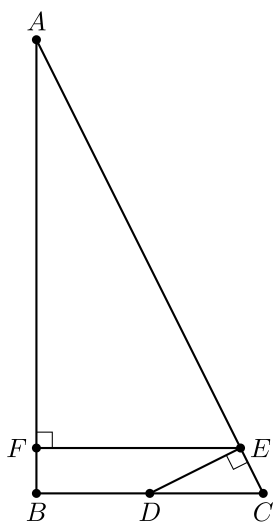
5. Jika sisa pembagian $x^{2021} + x^{1011} + x^{506} + x^{258} + x^{127}$ oleh $x^2 - 1$ adalah $Ax + B$, maka nilai $4A + 5B = \ldots .$

6. Sebuah papan catur persegi panjang 3×22 akan ditutupi 22 buah L-tromino seperti pada gambar di bawah ini, sehingga seluruh papan catur tertutup oleh seluruh L-tromino dan tidak ada tromino yang tumpang tindih.



Banyak cara untuk menyusun L-tromino tersebut adalah . . . .

7. Diberikan segitiga ABC seperti di gambar, dengan panjang $AB = 2BC$ dan $BD = CD$. Jika luas segitiga DEC adalah 10, luas dari segitiga AFE adalah . . . .



8. Untuk setiap bilangan asli n, misalkan $S(n)$ adalah jumlah dari semua digit-digit dari n. Diberikan barisan $\{a_n\}$ di mana $a_1 = 5$ dan $a_n = (S(a_{n-1}))^2 - 1$ untuk $n \geq 2$. Sisa pembagian $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2022}$ dengan 21 adalah . . . .

9. Diberikan dua bilangan real x, y di mana $x > y > 0$. Jika
$$x + 300 \leq \sqrt{x^2 - y^2 + +600(x+y)},$$
nilai dari y adalah . . . .

10. Misalkan bilangan asli x sehingga $x^2 + 110x$ merupakan bilangan pangkat tiga dari suatu bilangan prima, maka nilai x adalah . . . .

§1.2 Kemampuan Lanjut

Terdiri dari 10 soal. Setiap soal yang dijawab benar bernilai 4 poin, dijawab salah bernilai -1 poin, dan tidak dijawab (kosong) bernilai 0 poin.

1. Di suatu ruangan terdapat 12 kursi yang disusun menjadi 3 baris. Di baris pertama, terdapat 3 kursi. Di baris kedua, terdapat 4 kursi. Di baris ketiga, terdapat 5 kursi. Jika kursi akan diduduki oleh 12 siswa termasuk Aska dan Budi. Misal banyaknya cara untuk 12 siswa menempati tempat duduk jika Aska dan Budi ada di baris pertama adalah A. Nilai dari $\frac{A}{8!}$ adalah . . . .

2. Diberikan segitiga siku-siku ABC. Jika luas dari segitiga ABC adalah 112. Misalkan R adalah panjang jari-jari lingkaran luar segitiga ABC dan r adalah panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC. Diketahui juga $R + r = 16$. Panjang sisi miring dari segitiga ABC adalah . . . .

3. Jika
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k + B}{3^{k+1}} = 10,$$
maka $B =$ . . . .

4. Banyak tupel bilangan bulat $(x_1, x_2, \cdots, x_7)$ yang memenuhi $w_1 + w_2 + \cdots + w_7 = 155$ dengan $21 \leq w_1, w_2, \cdots, w_7 \leq 23$ adalah . . . .

5. Diberikan ABC siku-siku sama kaki dengan panjang $BC = AB$ dan titik L titik tengah BC. Titik P pada sisi AC sehingga BP tegak lurus dengan AL. Jika panjang $CP = 30\sqrt{2}$, panjang AB adalah . . . .

6. Diberikan bilangan asli m dan n. Jika $\text{FPB}(m, n) = 7$ dan $\text{FPB}(2m, 3n) = 42$, nilai dari $\text{FPB}(21m, 14n)$ adalah . . . .

7. Diberikan bilangan real positif a, b, c, d. Jika $a > c$ dan $d > b$ sehingga
$$4a^2 + 4b^2 = 4c^2 + 4d^2 = 5ac + 5bd,$$
nilai dari $\frac{20(ab+cd)}{ad+bc}$ adalah . . . .

8. Misalkan A adalah himpunan semua bilangan 8 digit yang digit-digitnya terdiri dari digit 1, 2, atau 3 dan memuat paling sedikit satu digit 2. Banyaknya bilangan N di A sehingga setiap digit 2 di N di A sehingga setiap digit 2 di n diapit oleh digit 1 dan 3 adalah . . . .

9. Diberikan belah ketupat $ABCD$ dan titik E ada di dalam $ABCD$ sehingga panjang $AE = BE$. Jika $\angle BAE = 12^\circ$ dan $\angle DAE = 72^\circ$, besar $\angle CDE$ dalam satuan derajat adalah . . . .

10. Diberikan bilangan bulat x, y, z sehingga

$$x^2y + y^2z + z^2x - 23 = xy^2 + yz^2 + zx^2 - 25 = 3xyz.$$

Nilai maksimum dari $x + y + z$ adalah . . . .

2 Soal dan Solusi

§2.1 Kemampuan Dasar

Terdiri dari 10 soal. Setiap soal yang dijawab benar bernilai 2 poin dan tidak ada pengurangan untuk soal yang dijawab salah atau tidak dijawab (kosong).

1. Misalkan $f(x) = a^2x + 300$. Jika

$$f(20) + f^{-1}(22) = f^{-1}(20) + f(22),$$

maka $f(1) = \dots$.

Jawab: 301

Misalkan $f^{-1}(x) = k$, maka

$$x = f(k) = a^2k + 300 \implies k = \frac{x-300}{a^2} \implies f^{-1}(x) = \frac{x-300}{a^2}.$$

Kita punya

$$\begin{aligned} 20a^2 + 300 + \frac{22-300}{a^2} &= \frac{20-300}{a^2} + 22a^2 + 300 \\ \iff 22a^2 + 300 - 20a^2 - 300 &= \frac{22-300-(20-300)}{a^2} \\ \iff 2a^2 &= \frac{2}{a^2} \\ \iff a^4 &= 1. \end{aligned}$$

Maka $a^2 = 1$ (dengan asumsi $a \in \mathbb{R}$) dan diperoleh $f(1) = a^2 \cdot 1 + 300 = 1 + 300 = \boxed{301}$.

2. Banyaknya bilangan bulat dari 1001 sampai 2022 yang habis dibagi 15 atau 9 adalah $\dots$.

Jawab: 159

Kita gunakan **Prinsip Inklusi-Eksklusi.**

- Banyak bilangan bulat dari 1001 sampai 2022 yang habis dibagi 15 adalah $\left\lfloor \frac{2022}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 134 - 66 = 68$.
- Banyak bilangan bulat dari 1001 sampai 2022 yang habis dibagi 9 adalah $\left\lfloor \frac{2022}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{9} \right\rfloor = 224 - 111 = 113$.
- Akan ditinjau banyak bilangan bulat dari 1001 sampai 2022 yang habis dibagi 9 dan 15, artinya bilangan tersebut habis dibagi $\text{KPK}(9, 15) = 45$, yaitu ada $\left\lfloor \frac{2022}{45} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{45} \right\rfloor = 44 - 22 = 22$.

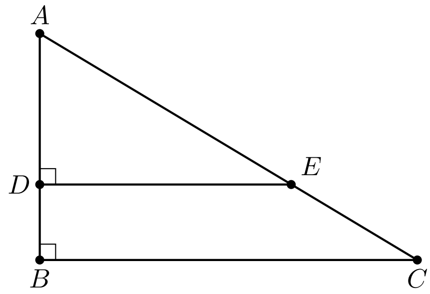
Sehingga banyak bilangan bulat dari 1001 sampai 2022 yang habis dibagi 15 atau 9 adalah $68 + 113 - 22 = \boxed{159}$.

3. Diberikan segitiga ABC siku-siku di B. Titik D berada pada sisi AB dan titik E berada pada sisi AC. Diketahui DE sejajar BC. Jika $AD = 21, DB = 3$, dan $BC = 32$, maka panjang AE adalah $\dots$.

Jawab: 35

Dari **Teorema Pythagoras**, kita punya $AC = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40$. Karena $DE \parallel BC$, maka $\angle ADE = \angle ABC$ dan $\angle DAE = \angle BAC$. Dari kriteria sudut-sudut, maka $\triangle DAE \sim \triangle BAC$. Kita punya

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \iff AE = \frac{AD}{AB} \cdot AC = \frac{21}{24} \cdot 40 = \boxed{35}.$$



4. Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan

$$|x| + |y| + |x + y| = 24$$

adalah . . . .

Jawab: 72

- Jika $x, y \geq 0$. Maka $x + y \geq 0$ dan kita punya $24 = x + y + x + y = 2x + 2y \implies x + y = 12$. Hal ini dipenuhi oleh $(x, y) = (12, 0), (11, 1), \cdots, (0, 12)$ yang berarti ada 13 solusi.
- Jika $x, y < 0$. Maka $x + y < 0$ dan kita punya $24 = -x - y - (x + y) = -2x - 2y \implies x + y = -12$. Hal ini dipenuhi oleh $(x, y) = (-11, -1), (-10, -2), \cdots, (-1, -11)$ yang berarti ada 11 solusi.
- Jika x dan y saling berbeda tanda (yaitu ketika $xy < 0$). Tinjau bahwa (x, y) solusi jika dan hanya jika (y, x) juga solusi. W.L.O.G. $x \geq 0$ dan $y < 0$.
  - Jika $x + y \geq 0$, maka $24 = x - y + x + y = 2x \implies x = 12$. Maka $y \geq -12$ sehingga dipenuhi oleh $(x, y) = (12, -12), (12, -11), \cdots, (12, -1)$ yang berarti ada 12 solusi.
  - Jika $x + y < 0$, maka $24 = x - y - (x + y) = -2y \implies y = -12$. Maka $x < 12$ sehingga dipenuhi oleh $(x, y) = (0, -12), (1, -12), \cdots, (11, -12)$ yang berarti ada 12 solusi.

  Maka dalam kasus ini total ada $2(12 + 12) = 48$ solusi.

Kita dapatkan total ada $13 + 11 + 48 = \boxed{72}$ pasangan bilangan bulat (x, y).

5. Jika sisa pembagian $x^{2021} + x^{1011} + x^{506} + x^{258} + x^{127}$ oleh $x^2 - 1$ adalah $Ax + B$, maka nilai $4A + 5B =$ . . . .

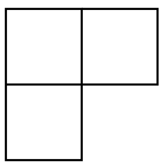
Jawab: 22

Tuliskan

$$\begin{aligned} x^{2021} + x^{1011} + x^{506} + x^{258} + x^{127} &= \left(x^2 - 1\right) P(x) + Ax + B \\ x^{2021} + x^{1011} + x^{506} + x^{258} + x^{127} &= (x + 1)(x - 1)P(x) + Ax + B. \qquad (*) \end{aligned}$$

Subtitusikan $x = 1$ dan $x = -1$ ke $(*)$, diperoleh persamaan $5 = A + B$ dan $-1 = -A + B$. Jumlahkan kedua persamaan tersebut dan diperoleh $4 = 2B \iff B = 2$. Maka $A = 3$ dan diperoleh $4A + 5B = 12 + 10 = \boxed{22}$.

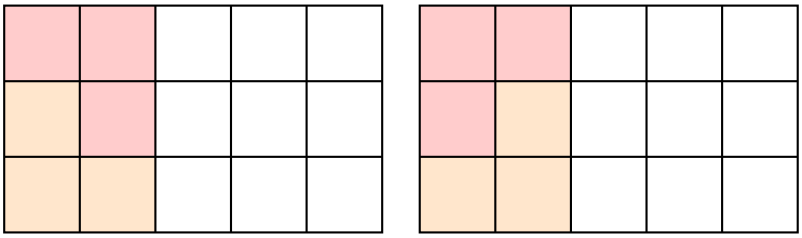
6. Sebuah papan catur persegi panjang 3×22 akan ditutupi 22 buah L-tromino seperti pada gambar di bawah ini, sehingga seluruh papan catur tertutup oleh seluruh L-tromino dan tidak ada tromino yang tumpang tindih.



Banyak cara untuk menyusun L-tromino tersebut adalah . . . .

Jawab: 2048

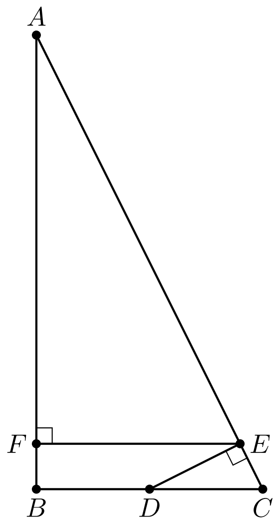
Alternatif 1. Perhatikan gambar berikut dan kita pasang L-tromino pertama seperti berikut (yang ditandai warna orange). Ada dua kemungkinan posisi pemasangan L-tromino. Untuk menutupi papan tersebut, L-tromino selanjutnya harus dipasang seperti gambar berikut (yang ditandai warna merah). Pemasangan ini hanya ada 1 cara saja. Maka untuk setiap persegi panjang berukuran 3×2 ada $2 \cdot 1 = 2$ cara.



Karena papan catur tersebut berukuran 3×22, banyak cara pemasangan L-tromino tersebut adalah $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{11} = 2^{11} = \boxed{2048}$ cara.

Alternatif 2. Misalkan $f(n)$ menyatakan banyak cara menutupi papan berukuran $3 \times 2n$ dengan L-tromino untuk setiap bilangan asli n. Pasang L-tromino pada persegi panjang berukruan 3×2 di paling kiri, hal ini ada sebanyak 2 cara (seperti argumen sebelumnya). Kemudian, banyak cara menyusun L-tromino pada papan catur berukuran $3 \times (2n-2)$ adalah $f(n-1)$. Maka kita simpulkan bahwa $f(n) = 2f(n-1)$ untuk setiap $n \geq 2$. Mudah ditinjau $f(1) = 2$ dan diperoleh $f(11) = 2^{11} = \boxed{2048}$.

7. Diberikan segitiga ABC seperti di gambar, dengan panjang $AB = 2BC$ dan $BD = CD$. Jika luas segitiga DEC adalah 10, luas dari segitiga AFE adalah . . . .



Jawab: 162

Alternatif 1. Misalkan panjang $BC = 2n$, maka panjang $AB = 4n$. Dari **Teorema Pythagoras**, kita punya $AC = \sqrt{(4n)^2 + (2n)^2} = 2n\sqrt{5}$. Kita punya panjang $BD = DC = n$. Perhatikan $\triangle ABC$, kita punya

$$\sin \angle DCE = \sin \angle BCA = \frac{AB}{AC} = \frac{4n}{2n\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Dengan cara sama, diperoleh $\cos \angle DCE = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Karena $[DEC] = 10$, maka

$$10 = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot CE \cdot \sin \angle DCE = \frac{1}{2} \cdot n \cdot CE \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \implies CE = \frac{10\sqrt{5}}{n}.$$

Tinjau $\triangle DCE$, kita punya

$$\cos\angle DCE = \frac{CE}{DC} = \frac{\frac{10\sqrt{5}}{n}}{n} = \frac{10\sqrt{5}}{n^2} \implies n^2 = \frac{10\sqrt{5}}{\cos\angle DCE} = \frac{10\sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 50.$$

Maka $n = 5\sqrt{2}$. Maka $AC = 10\sqrt{10}, BC = 10\sqrt{2}$, dan $EC = \sqrt{10}$. Kita peroleh $AE = 9\sqrt{10}$. Karena $\angle EFA = \angle CBA$ dan $\angle FAE = \angle BAC$, dari kriteria sudut-sudut diperoleh $\triangle EAF \sim \triangle CBA$. Maka

$$\frac{FE}{BC} = \frac{AE}{AC} \iff FE = \frac{AE}{AC} \cdot BC = \frac{9\sqrt{10}}{10\sqrt{10}} \cdot 10\sqrt{2} = 9\sqrt{2}.$$

Maka $[AFE] = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot AE \cdot \sin\angle FEA = \frac{1}{2} \cdot 9\sqrt{2} \cdot 9\sqrt{10} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \boxed{162}$.

Alternatif 2. Tinjau bahwa $\angle DCE = \angle BCE = \angle FEA \implies \angle DCE = \angle FEA$ dan $\angle DEC = \angle EFA$. Dari kriteria sudut-sudut, maka $\triangle DEC \sim \triangle AFE$. Sebelumnya, kita punya $DC = 5\sqrt{2}$ dan $AE = 9\sqrt{10}$. Maka

$$\frac{[AEF]}{[DEC]} = \left(\frac{AE}{DC}\right)^2 = \left(\frac{9\sqrt{10}}{5\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{81}{5} \implies [AEF] = \frac{81}{5}[DEC] = \boxed{162}.$$

8. Untuk setiap bilangan asli n, misalkan $S(n)$ adalah jumlah dari semua digit-digit dari n. Diberikan barisan $\{a_n\}$ di mana $a_1 = 5$ dan $a_n = (S(a_{n-1}))^2 - 1$ untuk $n \geq 2$. Sisa pembagian $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2022}$ dengan 21 adalah . . . .

Jawab: 18

Kita punya $a_2 = 24$, $a_3 = 35$, $a_4 = 63$, dan $a_5 = 80$.

Klaim — Untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$, maka

$$a_n = \begin{cases} 63, & \text{jika} \quad n = 2k \\ 80, & \text{jika} \quad n = 2k+1 \end{cases}, \text{ untuk } k \in \mathbb{N}_{\geq 2}.$$

Bukti. Akan kita buktikan dengan induksi. Untuk $k = 2$, maka $a_4 = 63$ dan $a_5 = 80$ yang mana benar. Asumsikan untuk suatu $k = t$ maka berlaku $a_{2t} = 63$ dan $a_{2t+1} = 80$. Untuk $k = t+1$, kita punya

$$a_{2(t+1)} = a_{2t+2} = (S(a_{2t+1}))^2 - 1 = 63$$
$$a_{2(t+1)+1} = a_{2t+3} = S(a_{2t+2})^2 - 1 = 80.$$

Maka untuk $k = t+1$ juga benar sehingga menurut induksi klaim terbukti. □

Kita punya $a_{2k} \equiv 0 \pmod{21}$ dan $a_{2k+1} \equiv -4 \pmod{21}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Maka

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_{2022} &\equiv a_1 + a_2 + a_3 + \sum_{i=2}^{1011} a_{2i} + \sum_{i=2}^{1010} a_{2i+1} \pmod{21} \\ &\equiv 5 + 24 + 35 + \sum_{i=2}^{1011} 0 + \sum_{i=2}^{1010} -4 \pmod{21} \\ &\equiv 64 + 0 \cdot 1010 - 4 \cdot 1009 \pmod{21} \\ &\equiv 22 - 4 \cdot 1 \pmod{21} \\ &\equiv 18 \pmod{21}. \end{aligned}$$

Jadi, sisa pembagiannya adalah $\boxed{18}$.

9. Diberikan dua bilangan real x, y di mana $x > y > 0$. Jika

$$x + 300 \leq \sqrt{x^2 - y^2 + 600(x+y)},$$

nilai dari y adalah . . . .

Jawab: 300

Karena $x + 300 > 0$, dengan menguadratkan kedua ruas tidak akan mengubah tanda ketaksamaan. Kita peroleh

$$x^2 + 600x + 90000 \le x^2 - y^2 + 600x + 600y \iff y^2 - 600y + 90000 \le 0 \iff (y - 300)^2 \le 0.$$

Karena $(y - 300)^2 \ge 0$, maka haruslah $(y - 300)^2 = 0 \iff y = \boxed{300}$.

10. Misalkan bilangan asli x sehingga $x^2 + 110x$ merupakan bilangan pangkat tiga dari suatu bilangan prima, maka nilai x adalah . . . .

    Jawab: 11

    Misalkan $p^3 = x^2 + 100x$ untuk suatu bilangan prima p dan kita punya $p^3 = x(x + 100)$. Jelas bahwa $x + 100 > x$, maka harus $(x, x + 110) = \left(1, p^3\right)$ atau $(x, x + 110) = \left(p, p^2\right)$.

    - Jika $(x, x + 110) = \left(1, p^3\right)$, maka $p^3 = x + 110 = 111$ yang mana tidak memenuhi.
    - Jika $(x, x + 110) = \left(p, p^2\right)$, maka

    $$x^2 = x + 110 = p^2 \implies 0 = x^2 - x - 110 = (x - 11)(x + 10).$$

    Maka $x = 11$ dan dapat diperoleh $p = 11$ memenuhi.

    Jadi, $x = \boxed{11}$.

§2.2 Kemampuan Lanjut

Terdiri dari 10 soal. Setiap soal yang dijawab benar bernilai 4 poin, dijawab salah bernilai -1 poin, dan tidak dijawab (kosong) bernilai 0 poin.

1. Di suatu ruangan terdapat 12 kursi yang disusun menjadi 3 baris. Di baris pertama, terdapat 3 kursi. Di baris kedua, terdapat 4 kursi. Di baris ketiga, terdapat 5 kursi. Jika kursi akan diduduki oleh 12 siswa termasuk Aska dan Budi. Misal banyaknya cara untuk 12 siswa menempati tempat duduk jika Aska dan Budi ada di baris pertama adalah A. Nilai dari $\frac{A}{8!}$ adalah . . . .

   Jawab: 540

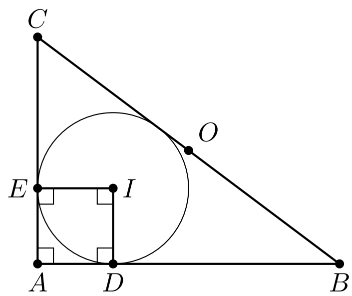
   Banyak cara Aska dan Budi duduk pada baris pertama adalah $P(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$ cara. Sedangkan, banyak cara 10 orang sisanya adalah 10!. Maka $A = 6 \cdot 10!$ dan kita punya

   $$\frac{A}{8!} = \frac{6 \cdot 10!}{8!} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = \boxed{540}.$$

2. Diberikan segitiga siku-siku ABC. Jika luas dari segitiga ABC adalah 112. Misalkan R adalah panjang jari-jari lingkaran luar segitiga ABC dan r adalah panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC. Diketahui juga $R + r = 16$. Panjang sisi miring dari segitiga ABC adalah . . . .

   Jawab: 24

   W.L.O.G. $\angle A = 90°$.



Misalkan O dan I berturut-turut merupakan titik pusat lingkaran luar dan lingkaran dalam $\triangle ABC$. Misalkan pula panjang $AB = 2c, BC = 2a$, dan $CA = 2b$ serta lingkaran dalam $\triangle ABC$ menyinggung $\overline{AB}$ dan $\overline{AC}$ berturut-turut di D dan E. Karena $\angle BAC = 90°$, maka BC merupakan diameter lingkaran luar $\triangle ABC$ sehingga O merupakan titik tengah BC. Maka $R = a$ dan $AD = s - BC = a+b+c-2a = b+c-a$. Karena $ADIE$ persegi panjang, maka $r = EI = AD = b+c-a$. Kita punya $16 = R + r = a+b+c-a = b+c \implies b+c = 16$. Selain itu, kita punya $[ABC] = \frac{(2b)(2c)}{2} \iff 56 = bc$. Dari **Teorema Pythagoras**, kita punya

$$BC = \sqrt{(2b)^2+(2c)^2} = 2\sqrt{b^2+c^2} = 2\sqrt{(b+c)^2-2bc} = 2\sqrt{16^2-112} = 2\sqrt{256-112} = 24.$$

Jadi, panjang sisi miringnya adalah $\boxed{24}$.

3. Jika

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+B}{3^{k+1}} = 10,$$

maka $B = \ldots.$

Jawab: 57

Kalikan 3 pada kedua ruas persamaan soal, kita punya

$$30 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+B}{3^k} = \frac{2+B}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k+B}{3^k} = \frac{2+B}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+2+B}{3^{k+1}} = \frac{2+B}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+B}{3^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k+1}}.$$

Dari soal kita bisa peroleh

$$30 = \frac{2+B}{3} + 10 + \frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2+B}{3} + 10 + \frac{1}{3} \implies 90 = 3 + B + 30 \iff B = \boxed{57}.$$

4. Banyak tupel bilangan bulat $(x_1, x_2, \cdots, x_7)$ yang memenuhi $w_1 + w_2 + \cdots + w_7 = 155$ dengan $21 \leq w_1, w_2, \cdots, w_7 \leq 23$ adalah $\ldots.$

Jawab: 357

Misalkan $x_i = y_i + 21$ untuk setiap $1 \leq i \leq 7$. Maka

$$155 = \sum_{i=1}^{7} x_i = \sum_{i=1}^{7} (y_i + 21) = \sum_{i=1}^{7} y_i + 147 \implies 8 = y_1 + y_2 + \cdots + y_7$$

di mana $0 \leq y_i \leq 2$.

- Jika $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7) = (2,2,2,2,0,0,0)$ dan permutasinya, banyak permutasinya ada $\frac{7!}{4!3!} = 35$.
- Jika $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7) = (2,2,2,1,1,0,0)$ dan permutasinya, banyak permutasinya ada $\frac{7!}{3!2!2!} = 210$.
- Jika $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7) = (2,2,1,1,1,1,0)$ dan permutasinya, banyak permutasinya ada $\frac{7!}{2!4!1!} = 105$.
- Jika $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7) = (2,1,1,1,1,1,1)$ dan permutasinya, banyak permutasinya ada $\frac{7!}{1!6!} = 7$.

Total ada $35 + 210 + 105 + 7 = 357$ pasangan $(y_1, y_2, \cdots, y_7)$. Karena nilai x_i unik dengan nilai y_i, maka banyak pasangan $(x_1, x_2, \cdots, x_7)$ sama dengan banyak pasangan $(y_1, y_2, \cdots, y_7)$, yaitu $\boxed{357}$.

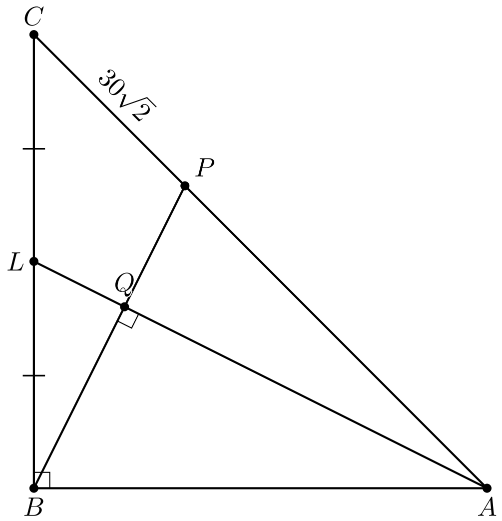
5. Diberikan ABC siku-siku sama kaki dengan panjang $BC = AB$ dan titik L titik tengah BC. Titik P pada sisi AC sehingga BP tegak lurus dengan AL. Jika panjang $CP = 30\sqrt{2}$, panjang AB adalah $\ldots.$

Jawab: 90

Alternatif 1. Misalkan panjang $BC = AB = 2x$ dan Q adalah perpotongan AL dengan BP. Tinjau $\angle BAQ = 90^\circ - \angle ABQ = \angle QBL \implies \angle BAL = \angle QBL$ dan $\angle BQL = \angle ABL$. Dari kriteria sudut-sudut, kita punya $\triangle BQL \sim \triangle ABL$. Maka

$$\frac{QL}{BL} = \frac{BL}{AL} \iff BL^2 = QL \cdot AL.$$

Secara analog, kita punya $\triangle BQA \sim \triangle LBA \implies BA^2 = QA \cdot LA$.



Dari **Teorema Pythagoras** dari $\triangle ABL$, kita punya $AL = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = x\sqrt{5}$. Kita punya juga $AC = \sqrt{(2x)^2 + (2x)^2} = 2x\sqrt{2}$ sehingga $AP = (2x - 30)\sqrt{2}$. Kita punya $QL = \frac{x}{\sqrt{5}}$ dan $QA = \frac{4x}{\sqrt{5}}$. Dari $\triangle BQL$, kita punya $\sin\angle PBC = \sin\angle QBL = \frac{QL}{BL} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ dan $\sin\angle PBA = \sin\angle QBA = \frac{AQ}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Dari aturan sinus $\triangle BPC$ dan $\triangle BPA$, kita punya

$$\frac{CP}{\sin\angle PBC} = \frac{CB}{\sin\angle BPC} = \frac{BA}{\sin\angle BPA} = \frac{AP}{\sin\angle ABP} \implies \frac{CP}{\sin\angle PBC} = \frac{AP}{\sin\angle ABP}.$$

Kita punya

$$\frac{30\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{(2x-30)\sqrt{2}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{(x-15)\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \iff x - 15 = 30 \iff x = 45.$$

Jadi, panjang AB adalah $2x = \boxed{90}$.

Alternatif 2 (Kenji Gunawan). Kita dapat mendilatasikan semua bangun pada bidang tersebut hingga panjang $BA = BC = 1$. W.L.O.G. $B = (0,0), A = (0,1)$, dan $C = (1,0)$. Maka persamaan garis $\overleftrightarrow{AC} \equiv y = 1 - x$ dan $\overleftrightarrow{AL} \equiv y = 1 - 2x$. Karena $\overleftrightarrow{BP} \perp \overleftrightarrow{AL}$, maka gradien $\overleftrightarrow{AL}$ adalah $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$ dan kita punya $\overleftrightarrow{BP} \equiv y = \frac{x}{2}$. Tinjau bahwa P perpotongan $\overleftrightarrow{BP}$ dan $\overleftrightarrow{AC}$, misalkan $Q = (a,b)$, berlaku $b = \frac{a}{2} = 1 - a$ sehingga diperoleh $P = (a,b) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Sehingga diperoleh $\frac{PA}{AC} = \frac{2}{3}$. Maka kita peroleh

$$PC = \left(1 - \frac{PA}{PC}\right) \cdot AC = \frac{1}{3}AC \implies AC = 3PC = 90\sqrt{2}.$$

Maka $AB = BC = \boxed{90}$.

6. Diberikan bilangan asli m dan n. Jika $\text{FPB}(m,n) = 7$ dan $\text{FPB}(2m,3n) = 42$, nilai dari $\text{FPB}(21m,14n)$ adalah . . . .

Jawab: 49

Hal ini ekuivalen dengan mencari $\text{FPB}(21m,14n) = 7 \cdot \text{FPB}(3m,2n)$. Dari $\text{FPB}(m,n) = 7$, misalkan $m = 7m_1$ dan $n = 7n_1$ untuk suatu bilangan asli m_1 dan n_1 di mana $\text{FPB}(m_1,n_1) = 1$. Maka

$$42 = \text{FPB}(2m,3n) = \text{FPB}(14m_1, 21n_1) = 7 \cdot \text{FPB}(2m_1, 3n_1) \implies 6 = \text{FPB}(2m_1, 3n_1).$$

Misalkan $2m_1 = 6m_2 \iff m_1 = 3m_2$ dan $3n_1 = 6n_2 \iff n_1 = 2n_2$ untuk suatu bilangan asli m_2 dan n_2 di mana $\text{FPB}(m_2, n_2) = 1$. Kita punya

$$\text{FPB}(3m, 2n) = \text{FPB}(21m_1, 14n_1) = 7 \cdot \text{FPB}(3m_1, 2n_1) = 7 \cdot \text{FPB}(9m_2, 4n_2) = 7 \cdot \text{FPB}(9, 4) = 7.$$

Sehingga $\text{FPB}(21m, 14n) = 7 \cdot 7 = \boxed{49}$.

7. Diberikan bilangan real positif a, b, c, d. Jika $a > c$ dan $d > b$ sehingga

$$4a^2 + 4b^2 = 4c^2 + 4d^2 = 5ac + 5bd,$$

nilai dari $\frac{20(ab+cd)}{ad+bc}$ adalah . . . .

Jawab: 16

__**Alternatif 1.**__ Buat segitiga ABC dan BCD di mana $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ serta panjang $AB = a, BC = b, CD = d =$, dan $DA = d$. Kita punya $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$ sehingga $ABCD$ segiempat tali busur. Tinjau bahwa

$$10ac + 10bd = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 = 4AC^2 + 4AC^2 = 8AC^2 \implies AC^2 = \frac{5}{4}(ac + bd).$$

Dari aturan kosinus $\triangle DAB$ dan $\triangle DCB$, maka

$$\cos\angle DAB = \frac{a^2 + d^2 - BD^2}{2ad} \quad \text{dan} \quad \cos\angle DCB = \frac{b^2 + c^2 - BD^2}{2bc}.$$

Karena $\angle DAB = 180^\circ - \angle DCB$, maka $\cos\angle DAB = -\cos\angle DCB$. Kita punya

$$\frac{a^2 + d^2 - BD^2}{2ad} = -\frac{b^2 + c^2 - BD^2}{2bc} \iff BD = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}.$$

Dari **Teorema Ptolemy**, kita punya

$$ac + bd = AC \cdot BD = AC \cdot \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}} \iff AC^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

Kita punya juga

$$AC^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd} \iff \frac{5}{4}(ac + bd) = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd} \iff \frac{5}{4} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Maka $20 \cdot \frac{ab+cd}{ad+bc} = 20 \cdot \frac{4}{5} = \boxed{16}$.

> **Remark.** Motivasi saya menggunakan interpretasi geometri: Ketika mengolah persamaan, saya mendapatkan bentuk $2(ab + cd) = (a + b + c - d)(a + b - c + d)$ dan ini mengingatkan saya dengan soal **IMO 2001/6** yang mana salah satu ide dari soal tersebut menggunakan interpretasi geometri hehe...

__**Alternatif 2 (Kenji Gunawan).**__ Misalkan $a = pc$ dan $d = qb$. Ini bisa dilakukan karena $b, c > 0$; sehingga $p, q > 1$, Maka dari itu diperoleh

$$4p^2c^2 + 4b^2 = k \tag{1}$$
$$4q^2b^2 + 4c^2 = k \tag{2}$$
$$5pc^2 + 5qb^2 = k. \tag{3}$$

Kita ingin mencari nilai

$$\frac{ab + cd}{ad + bc} = \frac{pcb + cqb}{pqbc + bc} = \frac{p + q}{pq + 1}.$$

Eliminasi 1. $(1) \times q^2 - (2)$:

$$4p^2q^2c^2 + 4b^2q^2 - 4q^2b^2 - 4c^2 = k\left(q^2 - 1\right) \iff 4c^2\left(p^2q^2 - 1\right) = k\left(q^2 - 1\right) \iff c^2 = \frac{k\left(q^2 - 1\right)}{4\left(p^2q^2 - 1\right)}.$$

Eliminasi 2. $(2) \times p^2 - (1)$:

$$4p^2q^2b^2 + 4p^2c^2 - 4p^2c^2 - 4b^2 = k\left(p^2 - 1\right) \iff 4b^2\left(p^2q^2 - 1\right) = k\left(p^2 - 1\right) \iff b^2 = \frac{k\left(p^2-1\right)}{4\left(p^2q^2-1\right)}.$$

Subtitusikan ke persamaan (3) :

$$k = 5pc^2 + 5qb^2 = \frac{5pk\left(q^2-1\right) + 5qk\left(p^2-1\right)}{4\left(p^2q^2-1\right)} \iff \frac{4}{5} = \frac{pq^2 - p + p^2q - q}{p^2q^2 - 1}.$$

Kalikan silang dan diperoleh

$$\begin{aligned} p^2q + pq^2 - p - q &= \frac{4}{5}p^2q^2 - \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5}p^2q^2 - p^2q - pq^2 + p + q - \frac{4}{5} &= 0 \\ pq\left(\frac{4}{5}pq - p - q + \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{4}{5}pq - p - q + \frac{4}{5}\right) &= 0 \\ (pq-1)\left(\frac{4}{5}pq - p - q + \frac{4}{5}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Karena $pq > 1$, maka

$$\frac{4}{5}pq - p - q + \frac{4}{5} = 0 \iff \frac{4}{5} = \frac{p+q}{pq+1} \iff 20 \cdot \frac{p+q}{pq+1} = \boxed{16}.$$

> **Remark.** Fakesolveable: Subtitusi $a = d$ dan $b = c$ sehingga diperoleh $4a^2 + 4b^2 = 10ab \iff b = 2a$. Subtitusikan ke yang diminta dan kita dapatkan hasilnya.

Alternatif 3. Subtitusi $a = p\sin x, b = p\cos x, c = p\sin y, d = p\cos y$ untuk suatu bilangan real p, x, y. Maka kita peroleh

$$4p^2\sin^2 x + 4p^2\cos^2 x = 4p^2\sin^2 y + 4p^2\cos^2 y = 5p^2\sin x\sin y + 5p^2\cos x\cos y \implies 4 = 5\cos(x-y).$$

Kita dapatkan

$$\frac{ab+cd}{ad+bc} = \frac{p^2\sin x\cos x + p^2\sin y\cos y}{p^2\sin x\cos y + p^2\cos x\sin y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2x)+\sin(2y)}{\sin(x+y)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sin(x+y)\cos(x-y)}{\sin(x+y)} = \cos(x-y) = \frac{4}{5}.$$

Maka nilai yang diminta adalah $20\cos(x-y) = \boxed{16}$.

8. Misalkan A adalah himpunan semua bilangan 8 digit yang digit-digitnya terdiri dari digit 1, 2, atau 3 dan memuat paling sedikit satu digit 2. Banyaknya bilangan N di A sehingga setiap digit 2 di N diapit oleh digit 1 dan 3 adalah . . . .

   Jawab: 560

   Alternatif 1. Banyak angka 2 maksimal sebanyak 3. Misalkan bilangannya adalah $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$.

   - Jika banyak angka 2 adalah 1. Maka angka 2 bisa dipilih di posisi A_2, A_3, A_4, A_5, atau A_6 sehingga ada 6 kemungkinan. Jika dipilih pada A_i, maka $(A_{i+1}, A_{i-1}) = (1,3), (3,1)$ sehingga ada 2 kemungkinan. Untuk lima digit sisanya ada $2^5 = 32$ kemungkinan. Maka total ada $6 \cdot 2 \cdot 32 = 384$ kemungkinan.
   - Jika banyak angka 2 adalah 2. Kita bagi subkasus:
     - Jika diantara dua angka 2 terdapat tepat 1 angka selain 2. Maka kedua angka 2 bisa diletakkan di A_i dan A_{i+2} untuk $2 \leq i \leq 5$ sehingga ada 4 kemungkinan. Sedangkan, $(A_{i-1}, A_{i+1}, A_{i+3}) = (1,3,1), (3,1,3)$ yang berarti ada 2 kemungkinan. Untuk tiga digit sisanya ada $2^3 = 8$ kemungkinan. Total ada $4 \cdot 2 \cdot 8 = 64$ kemungkinan.

- Jika diantara dua angka 2 terdapat lebih dari 1 angka selain 2. Maka angka 2 dapat diletakkan pada posisi A_i dan A_j di mana $|j-i| \geq 2$ dan $2 \leq i, j \leq 7$. Kita dapatkan (dapat dikuli) banyak cara meletakkan kedua angka 2 adalah 6 cara. Banyak kemungkinan (A_{i-1}, A_{i+1}) dan (A_{j-1}, A_{j+1}) masing-masing adalah 2 kemungkinan. Sedangkan, banyak kemungkinan untuk dua digit sisanya adalah $2^2 = 4$ kemungkinan. Total ada $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 96$ kemungkinan.

Maka dalam kasus ini ada $64 + 96 = 160$ kemungkinan.

- Jika banyak angka 3 adalah 3. Kita bagi subkasus:
  - Jika setiap diantara angka 2 terdapat tepat 1 angka selain 2, maka angka 2 dapat diletakkan di A_2, A_4, A_6 atau A_3, A_5, A_7 yang berarti ada 2 kemungkinan. Tinjau salah satunya, yaitu jika tiga angka 2 di posisi A_2, A_4, A_6. Maka $(A_1, A_3, A_5, A_7) = (1,3,1,3), (3,1,3,1)$ yang berarti ada 2 kemungkinan. Banyak kemungkinan satu digit sisanya adalah 2 kemungkinan. Total ada $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ kemungkinan.
  - Jika ada diantara angka 2 terdapat lebih dari 1 angka selain 2, maka ketiga angka 2 dapat diletakkan di $(A_2, A_4, A_7), (A_2, A_5, A_7)$ yang berarti ada 2 kemungkinan. Tinjau salah satunya, misalkan ketiga angka diletakkan di (A_2, A_4, A_7). Maka $(A_1, A_3, A_5) = (1,3,1), (3,1,3)$ yang berarti ada 2 kemungkinan. Sedangkan, $(A_6, A_8) = (3,1), (1,3)$ yang berarti ada 2 kemungkinan. Total ada $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ kemungkinan.

  Dalam kasus ini ada $8 + 8 = 16$ kemungkinan.

Maka total ada $384 + 160 + 16 = \boxed{560}$ kemungkinan.

Alternatif 2 (M. Jilan Wicaksono). Misalkan f_n menyatakan banyaknya bilangan n digit $b_n = \overline{a_1 a_2 \cdots a_n}$ dengan $a_i \in \{1,2,3\}$ dan setidaknya ada satu k sehingga $a_k = 2$ serta untuk setiap j dengan $a_j = 2$ berlaku $|a_{j+1} - a_j| = 2$, di mana $i, j, k \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$. Jelas bahwa $f_1 = f_2 = 0$. Untuk untuk b_n dengan $n \geq 3$. Perhatikan bahwa $a_n \in \{1, 3\}$.

- $a_{n-1} \in \{1,3\}$, maka banyak $b_{n-1} = \overline{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}$ yang memenuhi ada f_{n-1}, dan ada 2 kemungkinan nilai a_n. Maka total ada $2f_{n-1}$ bilangan.
- $a_{n-1} = 2$, bagi subkasus:
  - Ada $k \in \{1, 2, 3, \cdots, n-2\}$ sehingga $a_k = 2$. Maka banyak $b_{n-2} = \overline{a_1 a_2 \cdots a_{n-2}}$ yang memenuhi ada f_{n-2}, dan ada 1 kemungkinan nilai a_n yang memenuhi $|a_n - a_{n-2}| = 2$. Sehingga total ada f_{n-2} bilangan.
  - Tidak ada $k \in \{1, 2, 3, \cdots, n-2\}$ sehingga $a_k = 2$. Maka banyak $b_{n-2} = \overline{a_1 a_2 \cdots a_{n-2}}$ yang memenuhi ada 2^{n-2} dan 1 kemungkinan nilai a_n yang memenuhi $|a_n - a_{n-2}| = 2$. Sehingga total ada 2^{n-2} bilangan.

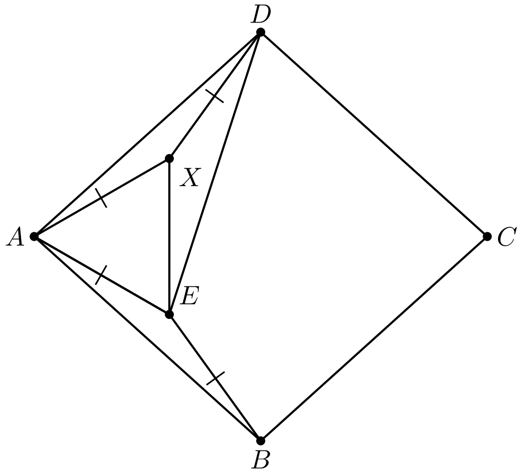
Diperoleh hubungan rekursif $f_n = 2f_{n-1} + f_{n-2} + 2^{n-2}$ untuk setiap $n \geq 3$ di mana $f_1 = f_2 = 0$. Diperoleh

$$f_3 = 2,\ f_4 = 8,\ f_5 = 26,\ f_6 = 76,\ f_7 = 210,\ f_8 = \boxed{560}.$$

9. Diberikan belah ketupat $ABCD$ dan titik E ada di dalam $ABCD$ sehingga panjang $AE = BE$. Jika $\angle BAE = 12^\circ$ dan $\angle DAE = 72^\circ$, besar $\angle CDE$ dalam satuan derajat adalah . . . .

   Jawab: 66

   Misalkan X di dalam $ABCD$ sehingga $\triangle AEB \cong \triangle AXD$. Kita punya panjang $AE = AX$ dan $\angle XAE = 72^\circ - 12^\circ = 60^\circ$. Kita peroleh bahwa $\angle AEX = \angle AXE = 60^\circ$ sehingga $\triangle AEX$ sama sisi. Maka panjang $XA = XE = XD$ yang berarti X adalah titik pusat lingkaran luar $\triangle ADE$. Akibatnya, $\angle ADE = \frac{\angle AXE}{2} = 30^\circ$. Kita punya $\angle CDE = 96^\circ - 30^\circ = \boxed{66^\circ}$.



10. Diberikan bilangan bulat x, y, z sehingga

$$x^2y + y^2z + z^2x - 23 = xy^2 + yz^2 + zx^2 - 25 = 3xyz.$$

Nilai maksimum dari $x + y + z$ adalah . . . .

Jawab: 24

Tinjau bahwa

$$2 = xy^2 + yz^2 + zx^2 - x^2y - y^2z - z^2x = (x - y)(y - z)(z - x).$$

Karena bentuk persamaan pada soal siklis, W.L.O.G. $\max\{x, y, z\} = x$. Mengingat $(x-y)+(y-z)+(z-x) = 0$, hal ini akan dipenuhi ketika $(x - y, y - z, z - x) = (2, -1, -1)$. Maka $x = y + 2$ dan $z = y + 1$. Subtitusi ke soal,

$$\begin{aligned}
xy^2 + yz^2 + zx^2 - 25 &= 3xyz \\
(y + 2)y^2 + y(y + 1)^2 + (y + 1)(y + 2)^2 - 25 &= 3(y + 2)y(y + 1) \\
y^3 + 2y^2 + y^3 + 2y^2 + y + y^3 + 5y^2 + 8y + 4 - 25 &= 3y^3 + 9y^2 + 6y \\
3y^3 + 9y^2 + 9y - 21 &= 3y^3 + 9y^2 + 6y \\
3y &= 21 \\
y &= 7.
\end{aligned}$$

Diperoleh $x = 9$ dan $z = 8$ sehingga $x + y + z = \boxed{24}$.

> **Remark.** Saya sudah cek melalui wolframalpha ternyata memang solusinya hanya $(x, y, z) = (9, 7, 8)$ dan permutasi siklisnya.